Wytrzymałość konstrukcji 1

Ćwiczenia

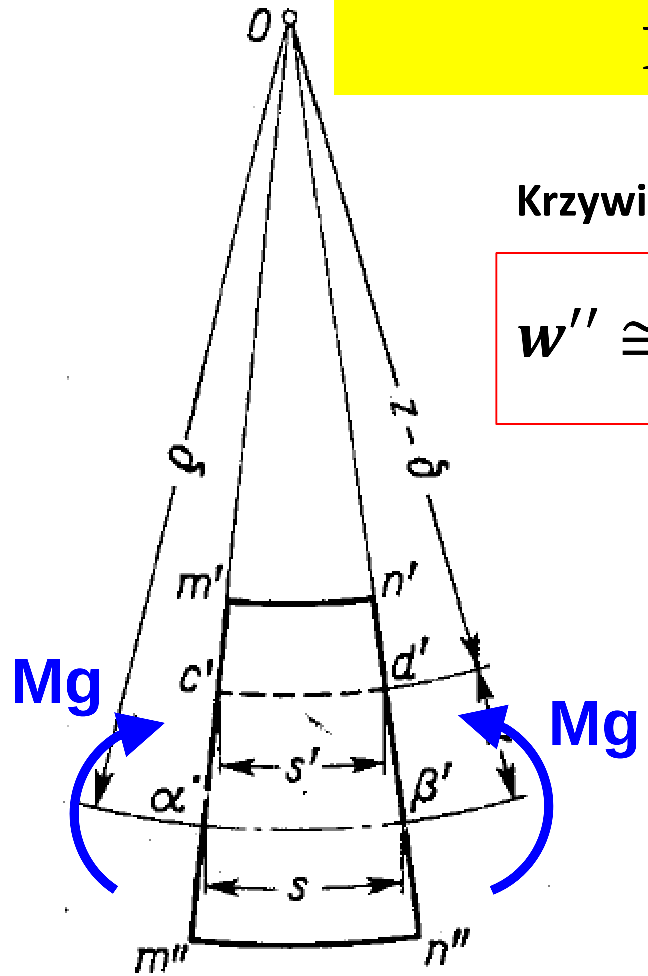
Pręty zginane

Podsumowanie

Przykład zadania typu egzaminacyjnego

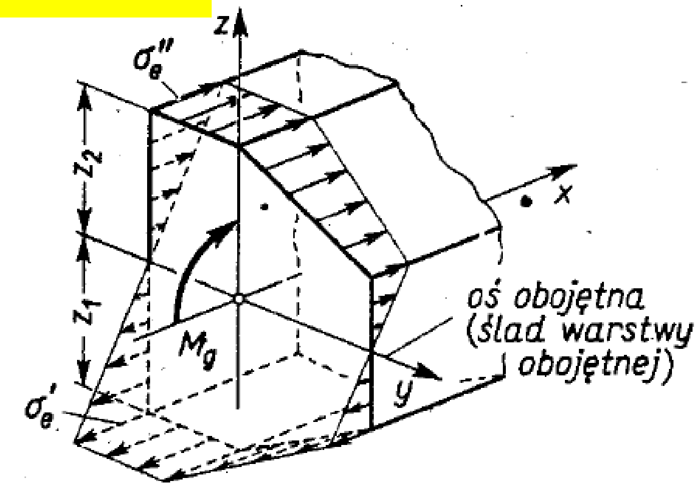
Dr hab. inż. Piotr Marek

Podsumowanie



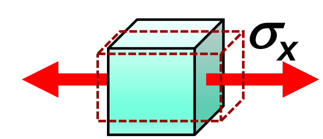
Krzywizna:

$$\boxed{w'' \cong \frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{EJ_y}}$$



Naprężenia normalne:

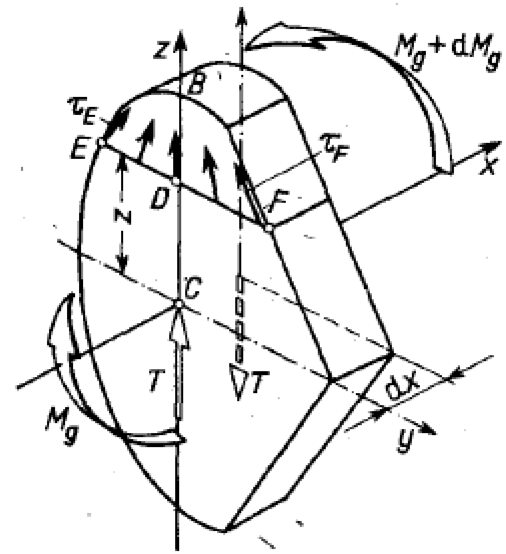
$$\boxed{\sigma = -\frac{M_g z}{J_y}}$$



Centralny główny moment bezwładności: $J_y = \int_A z^2 dA$

Naprężenia normalne ekstremalne: $\sigma^{extr} = -\frac{M_g z^{extr}}{J_y}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma^{extr} = \frac{M_g}{w_y}}$

$w_y = \frac{J_y}{z^{extr}}$ Wskaźnik wytrzymałości na zginanie

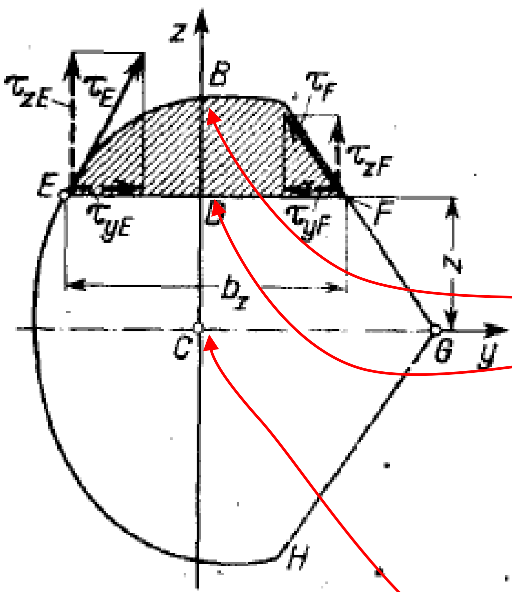


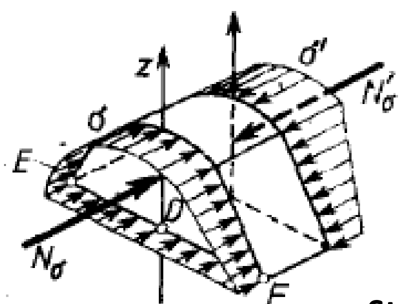
Podsumowanie

Średnie naprężenia tnące:

$$\boxed{\tau_{śr} = \frac{T}{A}}$$

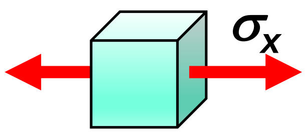
Naprężenia tnące w belce o przekroju zwartym:

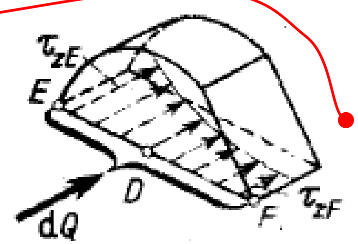




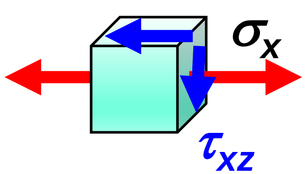
$$\boxed{\tau = \frac{T \cdot S_y(z)}{J_y\, b_z}}$$

Stan naprężenia w punkcie B (z=zmax):

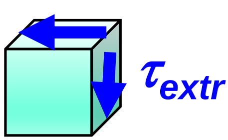




Stan naprężenia w punkcie D:

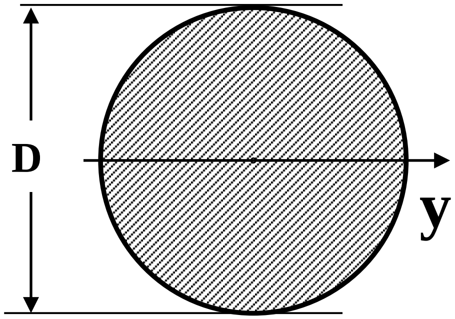


Stan naprężenia w punkcie C (z=0):

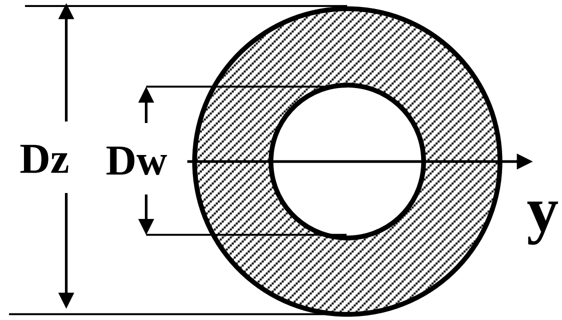


Momenty bezwładności typowych przekrojów:

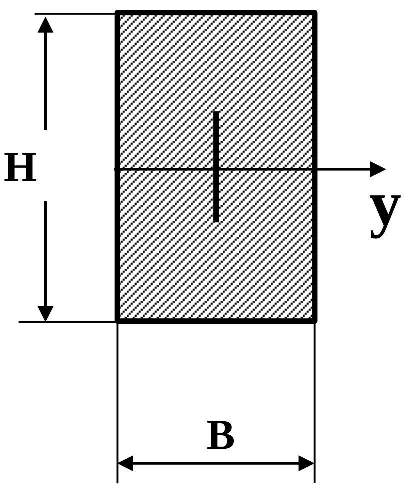
$$J_y = \int_A z^2 dA$$



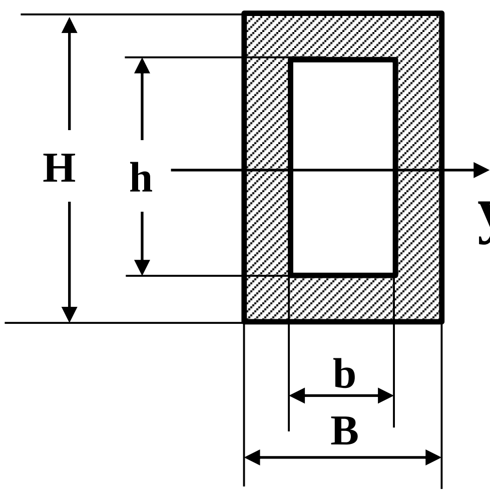
$$J_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

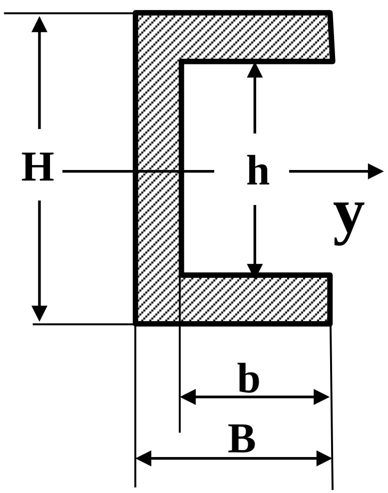


$$J_y = \frac{\pi(Dz^4 - Dw^4)}{64}$$

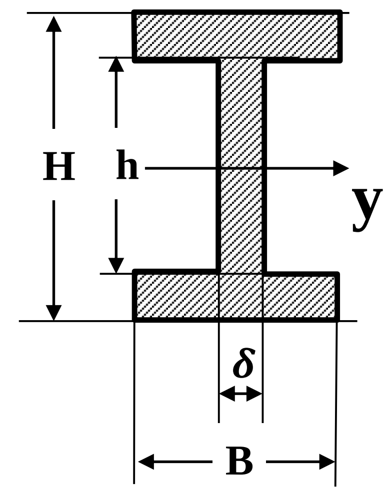


$$J_y = \frac{B H^3}{12}$$





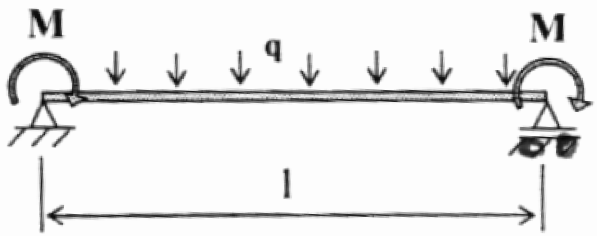
$$J_y = \frac{B H^3 - bh^3}{12}$$

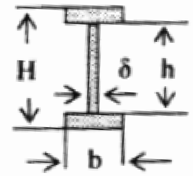


$$J_y = \frac{B H^3 - (B - \delta)h^3}{12}$$

Zadanie typu egzaminacyjnego

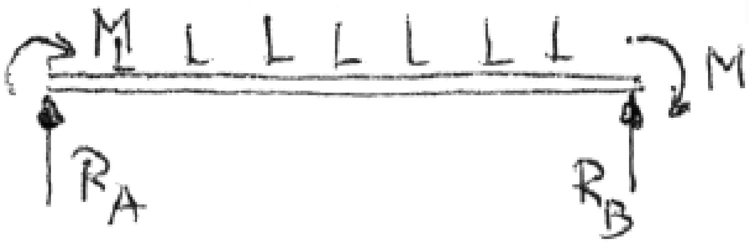
Zadanie 2.





$l = 1\ \text{m}$, $M = 1\ \text{kNm}$
$q = 8\ \text{kN/m}$, $H = 60\ \text{mm}$
$b = 24\ \text{mm}$, $h = 45\ \text{mm}$
$\delta = 4\ \text{mm}$, $E = 2 \cdot 10^5\ \text{MPa}$.

Obliczyć i sprawdzić reakcje . Wyznaczyć i narysować rozkłady sił przekrojowych . Obliczyć maksymalne naprężenia styczne . Wyznaczyć i naszkicować rozkład naprężeń normalnych w najbardziej niebezpiecznym przekroju . Wyznaczyć i naszkicować linię ugięcia belki.



Uwolnienie od więzów i wyliczenie reakcji:

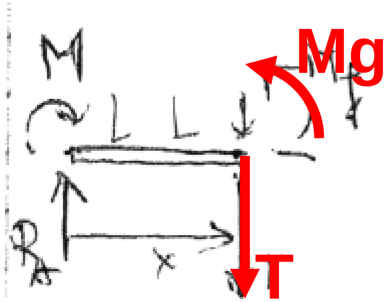
$$\boxed{R_A \cdot l + 2 \cdot M - q\frac{l^2}{2} = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_A = q\frac{l}{2} - \frac{2M}{l}}$$

$$\boxed{R_A = \frac{8 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{1} = 2\,\text{kN}}$$

$$\boxed{R_B \cdot l - 2M - \frac{q l^2}{2} = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_B = \frac{2M}{l} + \frac{q l}{2} = 8/2 + 2 = 6\,\text{kN}}$$

Suma sił na kierunek pionowy:

Myślowy przekrój



$$T - R_A + qx = 0 \Longrightarrow \boxed{T = R_A - qx}$$

$$T(0) = R_A = 2\ \mathrm{kN}$$

$$T(l) = R_A - ql = 2 - 8\cdot 1 = -6\ \mathrm{kN}$$

Znalezienie miejsca zerowania się siły tnącej:

$$T(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{R_A}{q} \Longrightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{2}{8}\,\mathrm{m} = 0{,}25\ \mathrm{m}}$$

Suma momentów względem punktu przecięcia:

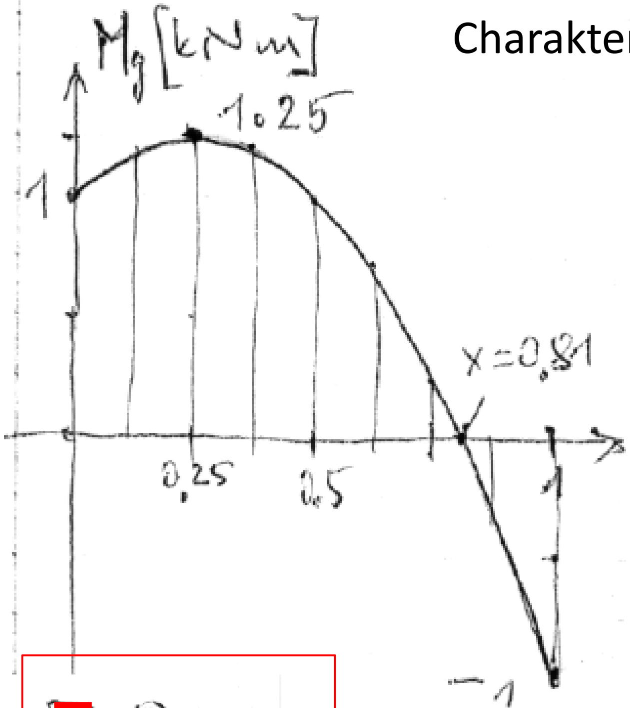
$$M_g - R_A x - M + qx^2/2 = 0 \Longrightarrow \boxed{M_g = M + R_A x - \frac{qx^2}{2}}$$

$$M_g(0) = M$$

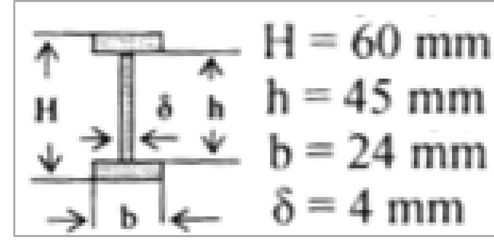
$$M_g(l) = M + R_A\cdot l - \frac{ql^2}{2} = 1 + 2\cdot 1 - \frac{8\cdot 1}{2} = -1$$

$$M_g(0{,}25\ \mathrm{m}) = 1 + 2\cdot 0{,}25 - \frac{8\cdot 0{,}25^2}{2} = 1{,}25\ \mathrm{kNm}$$

$$\boxed{M_g = M + R_A x - \frac{qx^2}{2}}$$



Charakterystyki przekroju poprzecznego belki:



$$J_y = \frac{60^3 \cdot 24 \cdot 2}{12} - \frac{20 \cdot 45^3 \cdot 2}{12} = 60^3 \cdot 2 - 45^2 \cdot 5 \cdot 15 = \cong 28\ cm^4$$

Naprężenia w górnych włóknach:

$$\sigma_g^{max} = \frac{-1250\ Nm}{28\ cm^4} \cdot 3\ cm = -134\ MPa$$

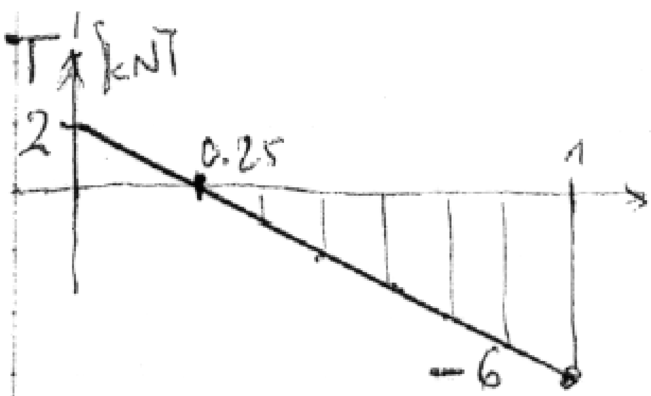
Dokładne obliczenie największych naprężeń od ścinania:

$$\boxed{\tau_T^{max} = \frac{T \cdot S_y(0)}{J_y\, \delta}}$$

$$S_y(0) = 24 \cdot 8 \cdot 26 + 22{,}5^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 6{,}05\ cm^3$$

$$\boxed{T = R_A - qx}$$

$$\tau_T^{max} = \frac{-6000\ N * 6050\ mm^3}{280000\ mm^4 * 4\ mm} = -32{,}5\ N/mm^2\ (MPa)$$



Szacowanie inżynierskie:

$$\tau_T^{śr} = \frac{T}{A\ \text{środnika}} = \frac{T}{h*\delta} = \frac{-6000\ N}{45\ mm * 4\ mm} = -33\ N/mm^2\ (MPa)$$

$$EJ_y = 2\cdot 10^5 \cdot 280125\ \mathrm{N\,mm^2} = 5,6025\cdot 10^{10}\ \mathrm{N\,mm^2} = 5,6025\cdot 10^4\ \mathrm{N\,m^2}$$

Linia ugięcia belki:

$$w'' = \frac{M}{EJ_y} + \frac{R_A}{EJ_y}\cdot x - \frac{q}{2EJ_y}x^2$$

$$w' = \frac{M}{EJ_y}x + \frac{R_A}{2EJ_y}x^2 - \frac{q}{6EJ_y}x^3 + C$$

$$w = \frac{M}{2EJ_y}x^2 + \frac{R_A}{6EJ_y}x^3 - \frac{q}{24EJ_y}x^4 + Cx + D$$

Warunki brzegowe:

$$w(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$w(l) = 0 \rightarrow \frac{M}{2EJ_y}l^{\cancel{2}} + \frac{R_A}{6EJ_y}l^{\cancel{3}\,2} - \frac{q}{24EJ_y}l^{\cancel{4}\,3} + C\cdot\cancel{l} = 0$$

$$C = \frac{1}{EJ_y}\left(\frac{q\,l^3}{24} - \frac{R_A l^2}{6} - \frac{M\,l}{2}\right) = \frac{1}{5,6025\cdot 10^4}\left(\frac{8\cdot 10^3}{24} - \frac{2\cdot 10^3}{6} - \frac{10^3}{2}\right) =$$

$$= (0,333 - 0,333 - 0,5)\cdot 10^3 / 5.6\cdot 10^4 = -0,00893$$

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{10^3}{5.6\cdot 10^4}\left(\frac{0.5^2}{2} + \frac{12\cdot 0.5^3}{6\cdot 3} - \frac{8\cdot 0.5^4}{24\cdot 3}\right) - 0.00893\cdot 0.5 =$$

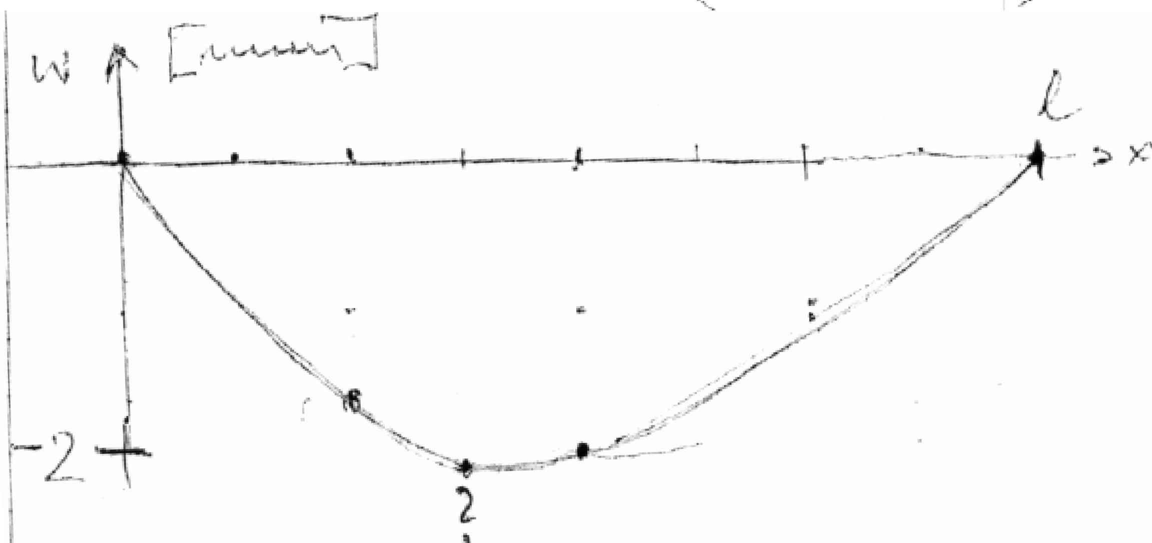
$$= \left(2.604\cdot 10^{-3} - 4.465\cdot 10^{-3}\right) = -1.86\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \approx -2\ \mathrm{mm}$$

$$w\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{10^3}{56\cdot 10^3}\left(\frac{0.25^2}{2} + \frac{12\cdot 0.25^3}{6\cdot 3} - \frac{18\cdot 0.25^4}{24\cdot 3}\right) - 8.93\cdot 10^{-3}\cdot 0.25 =$$

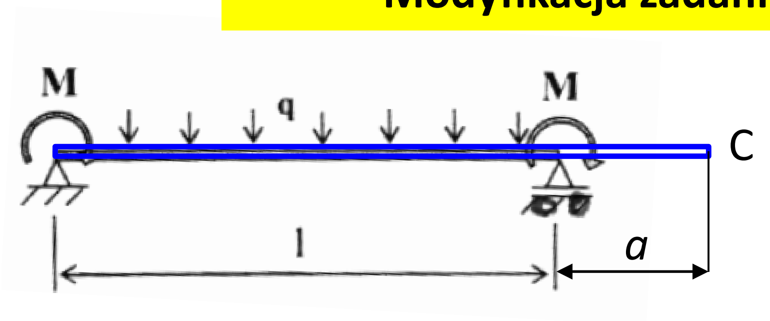
$$= 0.628\cdot 10^{-3} - 2.233\cdot 10^{-3} = -1.6\ \mathrm{mm}$$

$$w\left(\frac{3l}{4}\right) = \frac{1}{56}\left(\frac{0.75^2}{2} + \frac{0.75^3}{3} - \frac{0.75^4}{2}\right) - 8.93\cdot 10^{-3}\cdot 0.75 =$$

$$= 5.65\cdot 10^{-3} - 6.699\cdot 10^{-3} \approx (5.65 - 6.7)\cdot 10^{-3} = -1.05\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$



Modyfikacja zadania

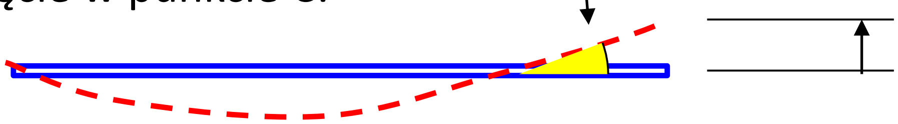


Znaleźć ugięcie w punkcie C i kąt ugięcia na podporze B

kąt ugięcia: $$w' = \frac{M}{EJ_y}x + \frac{R_A}{2EJ_y}x^2 - \frac{q}{6EJ_y}x^3 + C$$

kąt ugięcia na podporze B: $$\vartheta_B = w'(l) = \frac{Ml}{EJ_y} + \frac{R_A l^2}{2EJ_y} - \frac{ql^3}{6EJ_y} + C$$

Ugięcie w punkcie C:



$$w_C \cong \vartheta_C * a$$